In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful

LA FACULTÉ

SEEK KNOWLEDGE

Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects copyrights-free medical documents for non-lucratif use.
Some articles are subject to the author's copyrights.
Our team does not own copyrights for some content we publish.
"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to contact all the authors.
If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com
All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.
Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.

Chapitre V : Lois usuelles

A/ Lois discrètes :

I/ Loi uniforme :

1/ Déf : X est de loi uniforme sur l'ensemble $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

On écrit $X \underset{\text{suit une loi de proba}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{uniforme}}{\mathcal{U}_{\{x_1, x_2, \dots x_k\}}}$ si et seulement si

$$P(X = x_i) = \frac{1}{|E|}. \quad \forall x_i \in E = \mathcal{X}.$$

2/ Cas particulier : $E = \{1, 2, \dots, n\}$:

a/ Déf : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}$ si et seulement si :

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

b/ Exemple :

ex : $\mathcal{E}$: "lancer de dé".

X = n° de la face obtenue.

Loi de X : $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Updownarrow$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{\{1,2,3,4,5,6\}}.$$

c/ Espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(X = k).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}.$$

d/ Variance :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

où : $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

II/ Loi de Bernouilli :

1/ Déf :

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ de paramètre. $0 < p < 1$. ssi :

i/ $\mathcal{X} = \{0, 1\}$.

ii/ $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$
$= q$.

2/ Modélisation :

Soit $\mathcal{E}$ une expérience de Bernouilli

$\mathcal{E} \to \Omega = \{S, E\}$ où S : succés, E : échecs.

$S \cap E = \Phi \quad P(S) + P(E) = 1.$

On pose $X = \begin{cases} 1 & \text{si } S \\ 0 & \text{si } E \end{cases}$ avec $P = P(X = 1) = P(S$

3/ Espérance et Variance :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = p \\ V(X) = pq. \end{cases}$$

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2$$
$$= p(1 - p).$$

x_i	0	1	Σ
p_i	q	p	1
$x_i p_i$	0	p	$E(X) = p$
$x_i^2 p_i$	0	p	$E(X^2) = p$

III/ Loi binomiale :

1/ Déf :

X est de loi binomiale de paramètres n et p, on écrira :

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p) \quad 0 < p < 1$ ssi.

$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}$.

$$P(X = k) = C_n^k\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

2/ Modélisation :

Soit $\mathcal{E}$ une exp de Bernouilli, on répète cette exp. n fois de façon indépendante.

Soit X le nbre de succès obtenus, alors X est une binomiale de paramètres n et p. $X \rightsquigarrow B(n,p)$. $p = P(S)$.

N.B.: de façon indépendante veut dire $\Leftrightarrow$ p invariant ou inchangé au cours des répétitions $\Leftrightarrow$ tirage avec remise

Sans remise.
1er tirage : $P(1b) = \frac{1}{N}$.
2e tirage : $P(1b) = \frac{1}{N-1}$

Avec remise.
1er tirage : $P(1b) = \frac{1}{N}$.
2e tirage : $P(1b) = \frac{1}{N}$.

$\Leftrightarrow$ grande population $\frac{n}{N} \leqslant 10\%$

n : nbre de boules tirées.
N : taille de la pop.

ex:
On répète une exp. de Bernouilli n fois de façon indépendante. Soit X = le nbre de S obtenus. Loi de X ?

$P(X=k) = P(k\,S \text{ et } (n-k)\,E)$.

$= P(\underbrace{SS\dots S}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{EE\dots E}_{(n-k) \text{ fois}}) \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$= C_n^k \underbrace{P(S).P(S)\dots P(S)}_{k \text{ fois}}.\underbrace{P(E)\dots P(E)}_{(n-k) \text{ fois}}$.

$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k = \overline{0,n}$
$k = 1, 2, \dots, n.$

$\Leftrightarrow X \rightsquigarrow B(n,p)$.

N.B.: $B(p) = B(1,p)$.

3/ Proposition :

Soit $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de Bournouilli

$X_i \rightsquigarrow B(p) \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow X \rightsquigarrow B(n,p)$.

4/ Espérance et Variance :

$$X \rightsquigarrow B(n,p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = np \\ V(X) = np(1-p) = npq \end{cases}$$

En effet :

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où X_i iid

$$X \rightsquigarrow B(p) \Rightarrow \begin{cases} E(X_i) = p \\ V(X_i) = pq \end{cases} \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$.

$V(X) = V(\Sigma X_i)_{\text{indép.}} = \Sigma V(X_i) = npq$.

III/ Loi de Poisson :

1/ Déf. :

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$ ssi.

$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathcal{X} = \mathbb{N}$.

2/ Modélisation :

N.B.: La loi de Poisson est "souvent" liée au temps.

ex: X: le nbre d'appels reçus à 1 service d'urgence pendant un laps (intervalle) de temps.

3/ Espérance et Variance :

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow E(X) = Var(X) = \lambda$

4/ Proposition :

L'espérance est proportionnelle au temps.

ex:

Soit X : nbre d'appels reçus pendant un temps t_1. $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ λ_1 connue.

Soit Y : nbre d'appels reçus pendant un temps t_2 $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ $\lambda_2 = ?$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

5- Relation de récurrence:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} P(X=0) = e^{-\lambda} \\ P(X=k+1) = \frac{\lambda}{k+1} P(X=k) \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X=k+1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^k}{(k+1)\,k!}$$

ex: $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$P(X \leq 5)$?

$P(X=0) = e^{-\lambda}$

$P(X=1) = \frac{\lambda}{1} P(X=0)$.

$P(X=2) = \frac{\lambda}{2} P(X=1)$.

6/ Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson:

La loi de Poisson régit les phénomènes rares.

Soit $X \rightsquigarrow B(n,p)$.

Dans la pratique, si: $n \geq 50$

$p \leq 0{,}1$.

$np \leq 10$.

$\Rightarrow B(n,p) \underset{\infty}{\simeq} \mathcal{P}(\lambda)$.

où $\lambda = np$.

ex: Exo 16:

1/ M = "être malade". $P(M) = 0{,}01$.

X = nbre de malades sur les 100 examinés

"Quand c'est une pop $\Rightarrow$ tirage sans remis
si simultané

$$X \rightsquigarrow B(n,p) \Leftrightarrow P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$p = 0{,}01$ $n = 100$.

On a: $n = 100 > 50$.

$p = 0{,}01 < 0{,}1$.

$np = 1 < 10$.

$\Rightarrow B(n,p) \underset{\infty}{\simeq} \mathcal{P}(\lambda)$

$\lambda = np = 1$.

$P(X=k) = e^{-1} \frac{1^k}{k!}$ $\forall k = \overline{0,100}$

2/ $P(X \geq 2) = ?$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leq 1).$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} P(X=k) = 1 - e^{-1}\left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!}\right)$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$

$$= 0{,}26423.$$

Loi exacte: résultat approximatif

$$P(X \leq 2) = 1 - \left[C_{100}^0 (0{,}01)^0 (0{,}99)^{100} + C_{100}^1 (0{,}01)^1 (0{,}99)^{99}\right]$$

$$= 1 - \left[(0{,}99)^{100} + (0{,}99)^{99}\right] = 0{,}26423$$

résultat exact

Rajout:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1 \text{ indép. } X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

B/ Lois continues :

I/ Loi uniforme :

1/ Déf :

La variable X est de loi uniforme sur le segment $[a,b]$ si et seulement si :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2/ Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1 & x \geq b. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \end{cases}$$

3/ Espérance et Variance :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]} \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{a+b}{2} \\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx$$

II/ Loi Normale ou de Laplace-Gauss ou loi de Gauss :

1/ Loi Normale générale $N(m, \sigma^2)$:

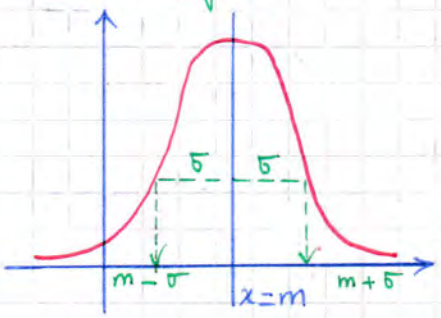
a/ Déf :

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ ssi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

N.B. : $m = E(X)$ $\sigma^2 = V(X)$.

b/ Graphe de $f(x)$:



* Courbe en cloche.

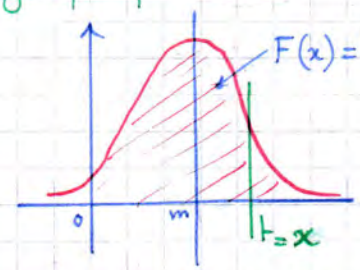
** $x = m$ axe de symétrie.

*** 2 pts d'inflexion. $x = m \pm \sigma$

b/ Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-m)^2}$$

i/ graphiquement :



ii/ analytiquement : ??

c/ Propriétés : Règle des 3σ :

$P(m-\sigma < X < m+\sigma) = 0,6827 \simeq 68\%$

$P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = 0,9545 \simeq 95\%$

$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 0,9973 \simeq 99,7\%$

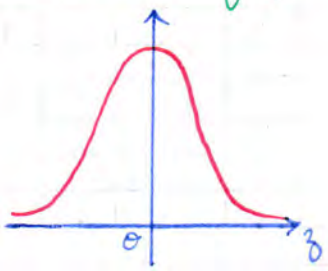
2/ Loi Normale centrée réduite $N(0,1)$:

a/ Déf:

$Z \rightsquigarrow N(0,1) \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

$\forall z \in \mathbb{R}$.

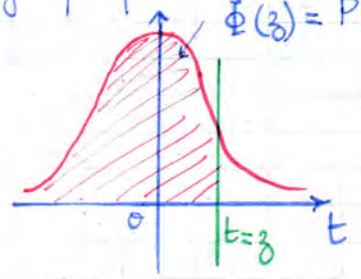
b/ Graphe de $f(z)$:



c/ Fonction de répartition:

$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.

i/ graphiquement:



ii/ analytiquement:

L'intégrale précédente a été calculée par interpolation et donnée sous forme de table statistique.

d/ Propriétés de $\Phi(z)$:

i/ $\Phi(0) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2} = P(Z \geq 0)$.

ii/ $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$P(Z \leq -z) = P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z)$.

$\Phi(-z)$ $1 - \Phi(z)$.

iii/ si $z > 0 \Rightarrow \Phi(z) > \frac{1}{2}$.

si $z < 0 \Rightarrow \Phi(z) < \frac{1}{2}$

e/ Lecture de la table:

i/ lecture directe z donné → lire $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

si $0 \leq z < 4$ → lire $\Phi(z)$ sur la table.

si $z \geq 4$ → $\Phi(z) = 1$.

si $z < 0$ → $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

ii/ lecture inverse. $\Phi(z) = \alpha$ connu → lire z.

i/ $\Phi(z) > \alpha > \frac{1}{2}$ → lire z.

ex: $\Phi(z) = \alpha = 0,6700 \rightarrow z = 0,44$.

$\Phi(z) = \alpha = 0,8930$ → n'est pas dans la table.

$0,8925 < 0,8930 < 0,8944$.

$\Phi(1,24) < \Phi(z) < \Phi(1,25)$.

ou $\Phi(z) = \Phi(1,24) \equiv$ la valeur la plus proche.

$z = 1,24$.

ii/ $\Phi(z) = \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow z$!

ex: $\Phi(z) = 0,25 < \frac{1}{2} \Rightarrow z < 0$.

On calculera $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

$\Phi(-z) = 1 - 0,25 = 0,75$

$0,7486 < 0,75 < 0,7513$.

$\Phi(0,67) < \Phi(-z) < \Phi(0,68)$

$\Phi(-z) = \Phi(0,67) \Rightarrow -z = 0,67$

$\Downarrow$

$z = -0,67$

3/ Théorème:

Soit $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$. $\Rightarrow Z \rightsquigarrow N(0,1)$

Soit $Z = \frac{X-m}{\sigma}$

$P(\leq) = \Phi(z)$.

$P(\geq) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ $P(X \leq x) = ?$

$[X \leq x] \Leftrightarrow [X-m \leq x-m] \Leftrightarrow \left[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right]$.

$P(X \leq) = P(X-m \leq x-m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right)$.

$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = \Phi(z)$ où $z = \frac{x-m}{\sigma}$

$P(X \geq x) = P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z)$

$= 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$.

ex: $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ $m = 2$, $\sigma^2 = 9$.

i/ $P(X \leq 5) = ?$

ii/ $x_0 = ?$ $P(X \geq x_0) = 0{,}05$.

i/ $P(X \leq x) = \Phi(z) \Rightarrow z = \frac{5-2}{3} = 1$.

$P(X \leq 5) = \Phi(1) = 0{,}8413$.

ii/ $x_0 = ?$ $P(X \geq x_0) = 0{,}05$.

$P(X \geq x_0) = \Phi(-z_0) = 0{,}05 \Rightarrow z_0 = \frac{x_0 - m}{\sigma}$

$x_0 = \sigma z_0 + m$.

on a $\Phi(-z_0) = 0{,}05 < \frac{1}{2}$.

on calcule $\Phi(z_0) = 1 - \Phi(-z_0) = 0{,}95$.

$\Phi(z_0) = 0{,}95 \Rightarrow z_0 = 1{,}65 \Rightarrow x_0 = 3 \times 1{,}65 + 2$

$x_0 = 6{,}95$.

4/ Espérence et variance:

i/ Si $Z \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow \begin{cases} E(Z) = 0 \\ V(Z) = 1 \end{cases}$

ii/ Si $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = m \\ V(X) = \sigma^2 \end{cases}$

i/ $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$

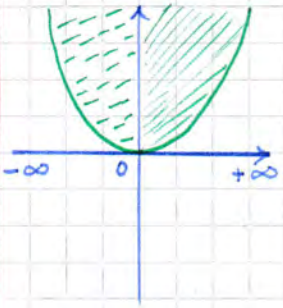
fonction impaire

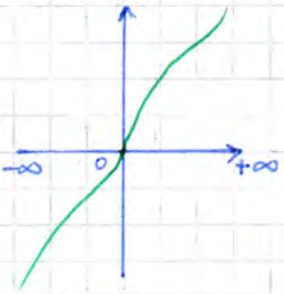
ii/ $V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = E(Z^2)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$.

$= 2\int_{0}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = 1$

$t = z^2$.





$Z = \frac{X-m}{\sigma} \Rightarrow X = \sigma Z + m$.

$E(X) = \sigma E(Z) + m = 0 + m = m$.

$V(X) = \sigma^2 V(Z) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$.

5/ Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale:

Soit X une ~~loi~~ de binomale de paramètres n, p. $X \rightsquigarrow B(n,p)$.

Dans la pratique; si: $n > 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$

$\Rightarrow B(n,p) \underset{\infty}{\simeq} N(m, \sigma^2)$ où $m = np$.

$\sigma^2 = npq$.

Exercices:

Exo 23:

X = nbre de sourds-muets sur un échantillon de 10.

1/ $P(X>1) = ?$

Loi de $X = ?$

$X \rightsquigarrow B(n,p)$ avec $n=10$ et $p=0,25$

$P(X=k) = C_{10}^{k} (0,25)^{k} (0,75)^{10-k}$ $k=\overline{0,10}$

$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - (0,75)^{10}$

2/ Y = nbre de sourd-muets sur 1 éch. de 300.

a/ $P(Y \geq 60) = ?$

$Y \rightsquigarrow B(300, 0,25)$.

On a $np = 75 > 5$ et $nq = 225 > 5$.

$= n - np$

$\Rightarrow B(n,p) \simeq N(m, \sigma^2)$; $m = np = 75$.

$\sigma^2 = npq$

$= 56,25$.

$P(Y \geq 60) = \Phi(-z)$ $z = \frac{60-m}{\sigma} = \frac{60-75}{\sqrt{56,25}}$

$= \Phi(2) = 0,\ldots$ $= -2$.

(voir table stat.).

b/ y_0 tel que $P(Y > y_0) = \frac{1}{2}$

$y_0 = m = 75$

6/ Loi de la somme:

Soit $(X_i)_{i=1,\ldots n}$ une suite de v.a. indép. $X_i \rightsquigarrow N(m_i, \sigma_i^2)$.

$\Rightarrow$ i/ $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

$= N(m, \sigma^2)$.

ii/ $Y = aX + b \rightsquigarrow N(am+b, a^2\sigma^2)$.

7/ Echantillonage:

Soit $(X_i)_{i=1,\ldots n}$ une suite de v.a. i.i.d tel que $X_i \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$.

$\Rightarrow$ a/ $X = \Sigma X_i \rightsquigarrow N(nm, n\sigma^2)$.

b/ $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

$\bar{X}$: moyenne échantillonnage.

Déf: la suite $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ constitue un éch. aléatoire d'une pop. de loi Normale.

8/ Théorème Central Limite TCL:

Soit $(X_i)_{i=1,\ldots n}$ une suite de v.a.i.i.d. tel que $E(X_i) = m$ et $V(X_i) = \sigma_i^2 \ \forall i$

$\xrightarrow[n>30]{} \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(nm, n\sigma^2)$.

et $\bar{X} = \frac{1}{n} \Sigma X_i \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

N.B:

$B(n,p) \simeq P(X=np)$.

$B(n,p) \simeq N(np, npq)$.

Application :

Soit $(X_i)_{i=1,\dots n}$ iid $X_i \rightsquigarrow B(p)$.

$m = E(X_i) = p$ et $V(X_i) = pq = \sigma^2$.

Alors : $\xrightarrow[30]{TCL}$ $X = \Sigma X_i \rightsquigarrow N(nm, n\sigma^2)$.

$N(np, npq)$.

$(X_i)_{i=1}$ $X_i \rightsquigarrow B(p)$ indépendante

$\Rightarrow X = \Sigma X_i \rightsquigarrow B(n,p)$ $\Rightarrow B(n,p) \simeq N(np, npq)$

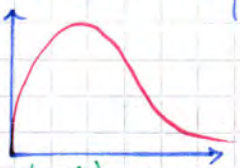
III/ Lois relatives à la loi Normale:

1/ loi de Khi-deux: X^2:

a/ Graphe:

Soit X une v.a. de loi du Khi-Deux à γ degrés de liberté. $X \rightsquigarrow X^2_\gamma$

la densité est donnée par ce graphe



b/ Espérance et Variance:

On montre que si $X \rightsquigarrow X^2_\gamma$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(X) = \gamma. \\ V(X) = 2\gamma. \end{cases}$$

c/ Lecture de la table:

La loi du Khi-deux n'est pas symétrique

ex: $X \rightsquigarrow X^2_{10}$.

$a = ?$ $P(X \geq a) = 0{,}95$.

$b = ?$ $P(X \leq b) = 0{,}95$.

$P(X \geq b) = 0{,}05$.

si $\gamma > 30 \Rightarrow X^2_\gamma \simeq N(m, \sigma^2)$.

$m = \gamma$, $\sigma^2 = 2\gamma$.

d/ Théorème 1:

si $X_1 \rightsquigarrow X^2_{\gamma_1}$, $X_2 \rightsquigarrow X^2_{\gamma_2}$, X_1 indép X_2 $\Rightarrow X_1 + X_2 \rightsquigarrow X^2_{\gamma_1+\gamma_2}$

e/ Théorème 2:

i/ soit $Z \rightsquigarrow N(0,1)$, soit $X = Z^2$.

$\Rightarrow X \rightsquigarrow X^2_1$

ii/ $(Z_i)_{i=1,\dots n}$ i.i.d. $Z_i \rightsquigarrow N(0,1)$

$Z_1 \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow Z_1^2 \rightsquigarrow X^2_1$

$Z_2 \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow Z_2^2 \rightsquigarrow X^2_1$

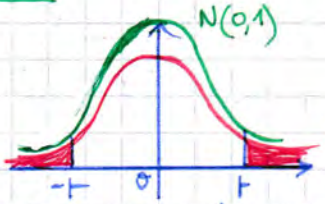
$Z_1^2 + Z_2^2 \rightsquigarrow X^2_{1+1} = X^2_2$

2/ loi de Student:

La loi de Student est tabulée, elle donnée par une table statistique.

X est de la loi de Student à γ degrés de liberté. $X \rightsquigarrow St_\gamma = t_\gamma$.

a/ Graphe:



$t = 0$ est un axe de symétrie.

$P(T \leq -t) = P(T \geq t)$.

ex: $T \rightsquigarrow St_{20}$ $t = ?$

$P(-t < T < t) = 0{,}95$.

$P(|T| \leq t) = 0{,}95$

$1 - P(|T| \leq t) = P(T \geq t) + P(T \leq -t)$

$= \frac{P}{2} + \frac{P}{2}$

b/ Théorème:

Si $X \rightsquigarrow N(0,1)$.

$Y \rightsquigarrow \chi^2_\gamma$.

X indép. de Y.

$$\Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{Y/\gamma}} = \sqrt{\gamma}\,\frac{X}{\sqrt{Y}} \rightsquigarrow St_\gamma.$$

IV/ Loi exponentielle:

1/ Déf:

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $(\lambda>0)$ ssi:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2/ Fonction de répartition:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda t)}\Big]_0^x$$

$$= \left[\lambda\, \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x$$

$$= -\left[e^{-\lambda x} - 1\right]$$

3/ Espérance et Variance:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{\lambda} \\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

4/ Modélisation:

En général, elle permet de modéliser les durées de vie d'êtres non soumis au vieillissement (ex: durée de vie des bactéries) ou bien des temps d'attente (ex: temps d'attente entre 2 signaux synaptiques).

N.B.: la différence entre la Poisson et l'exponentielle.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

X v.a.D. (Poisson)

X = nbre d'ind. qui attendent entre g^h et 10^h.

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$

X v.a.C.

X = le temps d'attente (expo)

Exo 25:

Y: temps d'attente en secondes.

$Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda = 0{,}01$.

A. $f(x) = (0{,}01)\,e^{-0{,}01x}$ $\forall x \in [0,+\infty[$

→ Faux.

B. $P(Y \leqslant y) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0{,}01 t}$ → Vrai

C. $P(Y \leqslant 3mn) = P(Y \leqslant 180s) = 1 - e^{-1{,}8}$

$= 0{,}83$

$\neq 0{,}16$.

D. $P(Y>60) = 1 - F(60) = e^{-0{,}01\times 60}$

$= e^{-0{,}6}$

$= 0{,}55 > \frac{1}{2}$

Exo 24:

X: durée d'hospitalisation.

$X \rightsquigarrow \chi^2_{18}$.

A. $\sigma(X) = \sqrt{36} = 6$ $\begin{cases} E(X) = \gamma \\ V(X) = 2\gamma = 36 \\ \sigma(X) = \sqrt{36} = 6 \end{cases}$

B. $P(X>18) = 0,5 \rightarrow$ faux

$P(X>x_0) = \frac{1}{2} \rightarrow x_0 = m$

$X \rightsquigarrow \chi^2_{18} \Rightarrow E(X) = 18$ jours.

$P(X>x_0) = P(X<x_0) = \frac{1}{2} \rightarrow x_0$ = médiane

la loi χ^2 n'est pas symétrique

$\Rightarrow$ Me $\neq$ moyenne.

Loi symétrique $\Rightarrow$ Me = E(X) = Mode

C. $P(X \leq a) = 0,05$. $a > 28$

Lecture de la table $a = 28,87 > 28$

D.

E. $P(21j < X < 28j) = \alpha < 0,25$

$P(X>28) = 0,05$

$P(X>2,16) = 0,25$.

Exo26 :

X, temps d'attente.

$X \rightsquigarrow U_{[0,6]}$.

$P(3<X<25) = ?$

$X \rightsquigarrow f(x)$.

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6}[x]_3^5 = \frac{1}{3}$$

$E(X) = \frac{a+b}{2} = 3$ mn.